第1章
逻辑代数基础

Video Image Processing (VIP)
Research Group @ Fudan
http://soc.fudan.edu.cn/vip/

范益波

2013.9

本章内容

如何用0、1来描述逻辑关系？

如何通过简单逻辑构建复杂逻辑？

逻辑可以“化简”么？

逻辑的终极构件—“与”“非”

本章要求

- 掌握逻辑代数的基本公式和基本定理
- 逻辑函数的各种表达方式
- 掌握逻辑函数的化简方法

1.1 逻辑代数概述

二值逻辑：逻辑关系中的条件和结论只取对立的两个值，例如是和非、对和错、真和假等等。

在逻辑代数中，通常用“1”代表“真”，用“0”代表“假”。

二值逻辑的“1”与“0”是逻辑概念，仅代表真与假，没有数量大小。

在数字逻辑中，有时也用“1”与“0”表示二进制数。这仅仅是一种代码，实际的运算规律还是依照逻辑运算进行。

逻辑函数

用一个数学表达式来描述一个逻辑关系问题

- 逻辑条件 → 输入变量（自变量）
- 逻辑结论 → 输出变量（因变量）

$$Y = f(A, B)$$

举例：用A表示是否有空闲，B表示是否有电影票，Y表示是否去看电影，Y=f(A,B)表示三者逻辑关系。

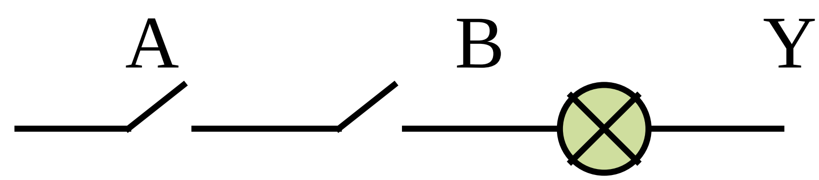
逻辑函数的表示方法

- 真值表
- 逻辑函数
- 逻辑图
- 卡诺图
- 硬件描述语言（HDL）

以上5种表示方法可以相互转换，各有特定用途

真值表

真值表：将逻辑关系用表格的形式表达出来。N个输入变量时，有2N种可能的输入组合，每种组合对应一行。这样逐一列出逻辑函数逻辑值的表格，称为该逻辑函数的真值表(truth table)



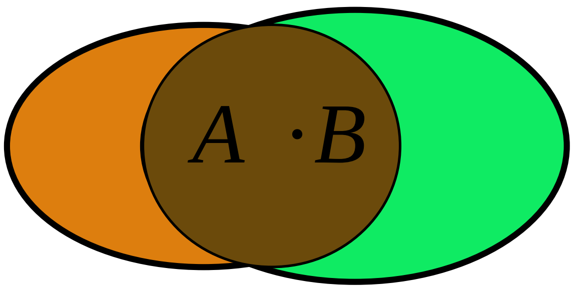
例：看电影问题的逻辑真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

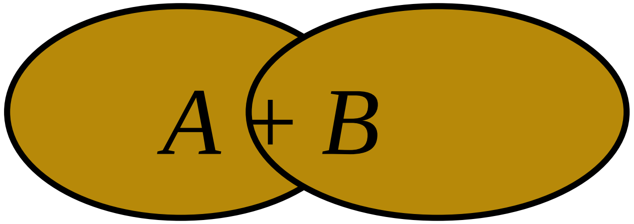
逻辑函数：基本逻辑运算

- 与(AND)　$Y = A \cdot B$

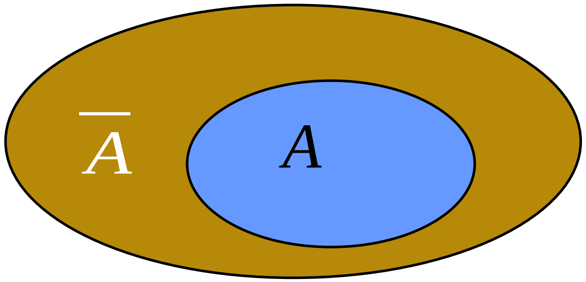
  可简记为AB



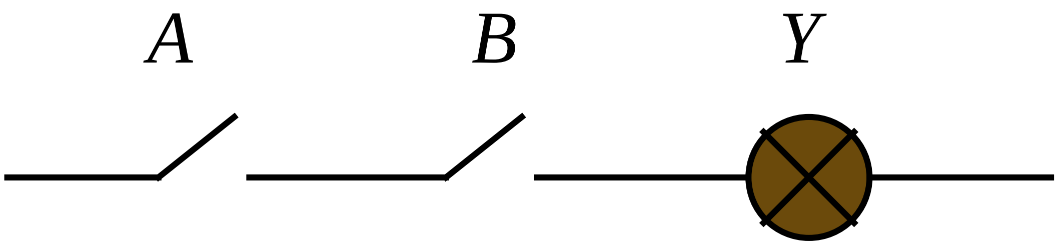
- 或(OR)　$Y = A + B$



- 非(NOT)　$Y = \bar{A}$



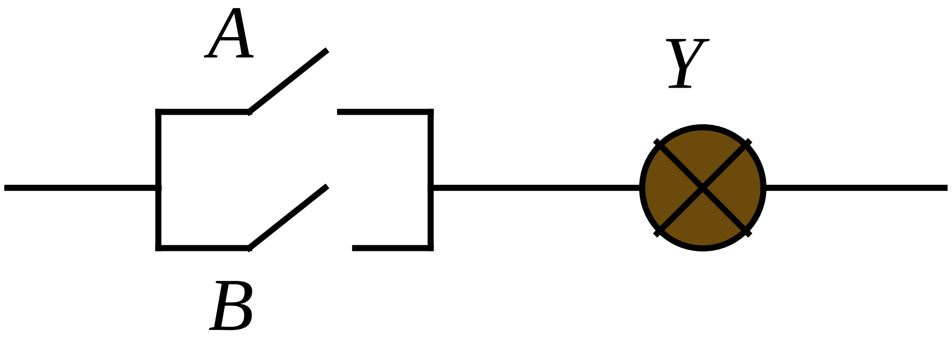
“与”运算



A	B	$Y = A\,B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

只有参与运算的所有输入变量都为“真”，运算结果才为“真”。

“或” 运算

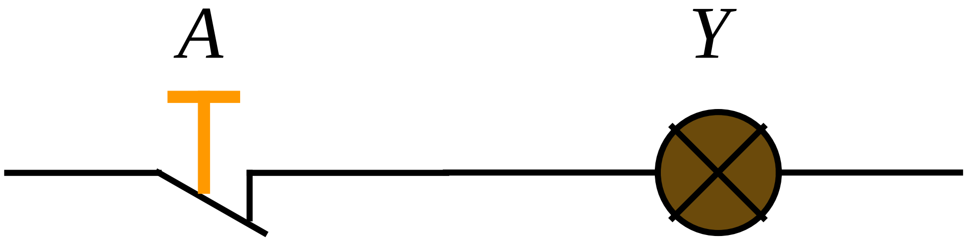


只要任一参与运算的
输入变量为“真”，
运算结果即为“真”。

A	B	$Y = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

"非"运算

$$Y = \bar{A}$$



运算结果是输入变量的相反值。

A	Y
0	1
1	0

三种基本运算的优先级

- 逻辑非的优先级最高
- 逻辑与的优先级其次
- 逻辑或的优先级最低

- 可以用加括号的方法来改变运算顺序。不引起误解的情况下可省略括号。

- 例如： $Y = AB + \overline{CD}$

反函数

- 两个逻辑函数互为反函数，是指两个逻辑函数对于输入变量的任意取值，其输出逻辑值都相反。下面真值表中 F 和 G 互为反函数。

A	B	$F(A,B)$	$G(A,B)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

复合逻辑运算

1. 与非　$Y = \overline{AB}$

2. 或非　$Y = \overline{A + B}$

3. 异或　$Y = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$

4. 同或　$Y = A \odot B = \overline{\bar{A}B + A\bar{B}}$

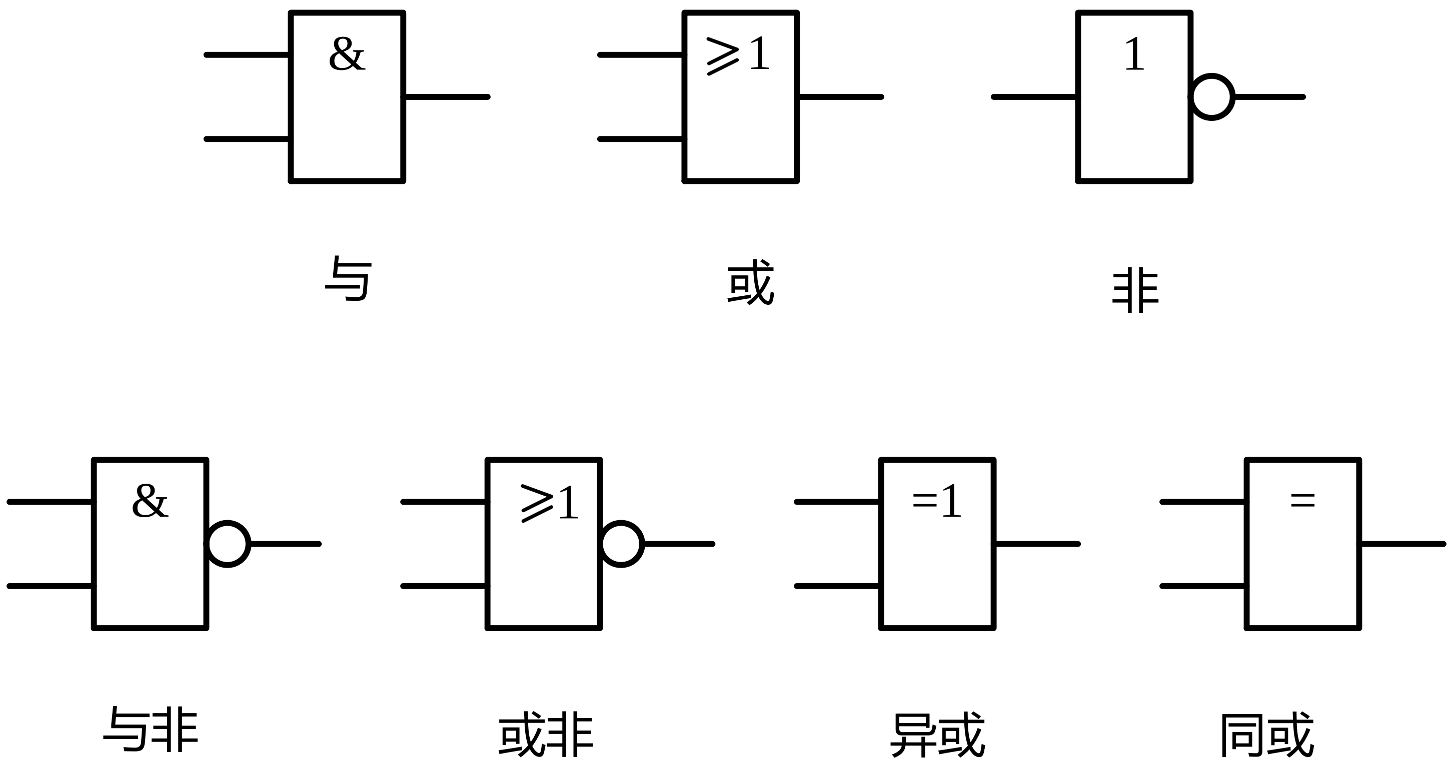
可用穷举法验证异或、同或的上述等式。

练习：画真值表，验证异或、同或的等式是否正确。

复合逻辑运算的真值表

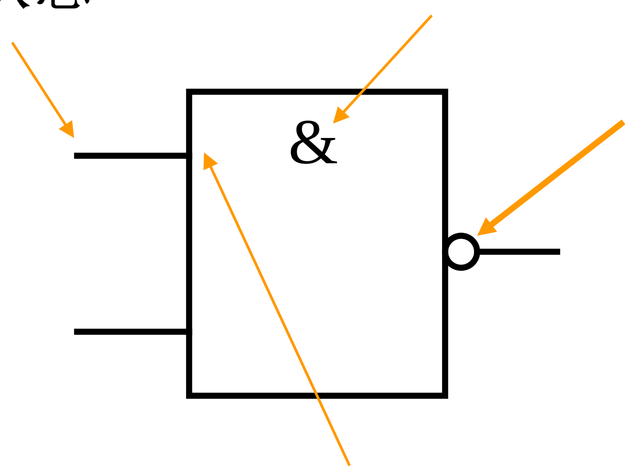
A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A+B}$	$A \oplus B$	$A \odot B$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1

逻辑图：基本逻辑单元



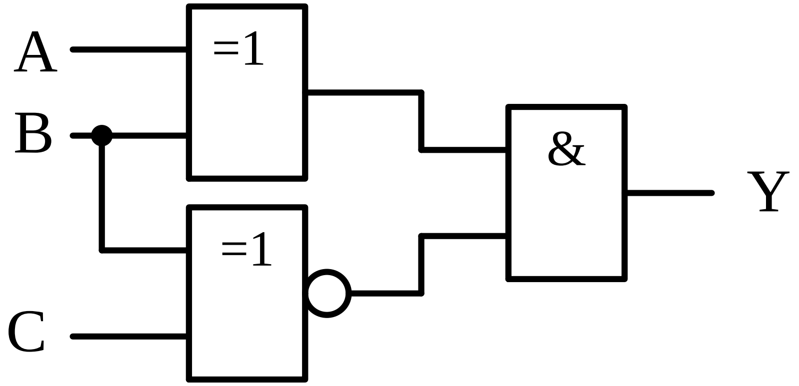
逻辑图符号标注规定（GB4728.12-1996）

所有逻辑符号都由方框（或方框的组合）和标注在方框内的总限定符号组成

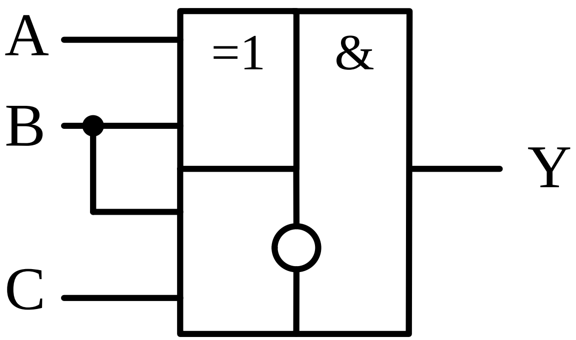


组合形式的逻辑图

$$Y = (A \oplus B) \cdot \overline{(B \oplus C)}$$



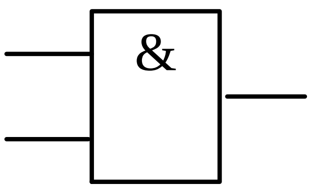
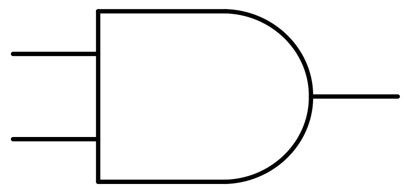
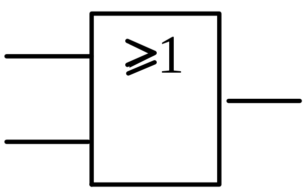
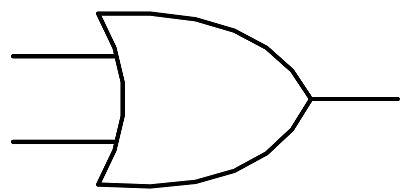
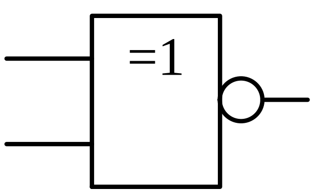
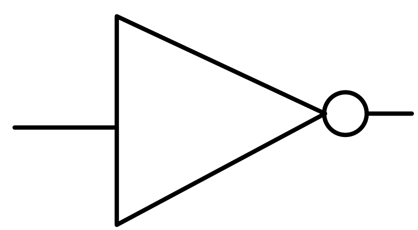
一般表示法

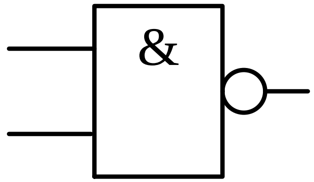
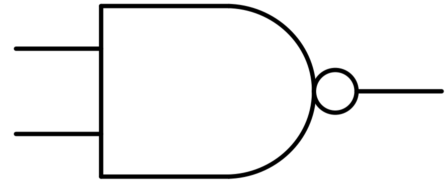
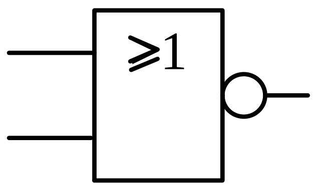
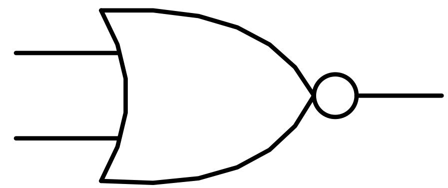
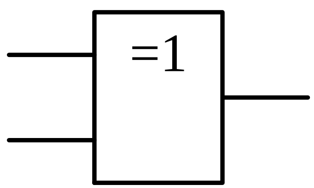
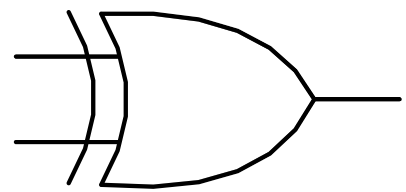
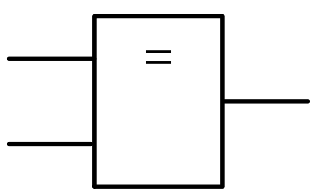
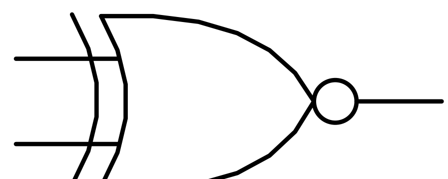


组合表示法

练习：给出一个逻辑表达式，画逻辑图表示。组合表示法也要了解。

国内外逻辑图符号对照

	国标符号 GB4728.12-1996	美、日常用符号
与门		
或门		
非门		

	国标符号 GB4728.12-1996	美、日常用符号
与非门		
或非门		
异或门		
同或门		

1.2 逻辑代数的基本定理

一、变量与常量的运算(0-1律)

$$A \cdot 1 = A \qquad A + 0 = A$$

$$A \cdot 0 = 0 \qquad A + 1 = 1$$

二、等幂律 $A \cdot A = A \qquad A + A = A$

三、互补律 $A \cdot \bar{A} = 0 \qquad A + \bar{A} = 1$

四、自反律 $\bar{\bar{A}} = A$

五、交换律

$$AB = BA \qquad A+B = B+A$$

六、结合律

$$A(BC) = (AB)C \qquad A+(B+C) = (A+B)+C$$

七、分配律

$$A(B+C) = AB+AC \qquad A+BC = (A+B)(A+C)$$

八、反演律（De Morgan定理 ）

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B} \qquad \overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

反演律，在逻辑函数的变换中经常用到。可以用“与”运算替代”或”运算，反之亦然。

可用单一形式电路(与非or或非)完成所有逻辑功能

代入定理

在任何一个逻辑等式中，若将其中一个逻辑变量全部用另一个逻辑函数代替，等式仍然成立。

例： 若 $Y=AC+BC$，

$$C=P+Q$$

则 $Y=A(P+Q)+B(P+Q)$

例：利用代入定理将分配律推广到4变量情况；利用代入定理将反演律推广到3变量情况. 参考书p9.

反演定理

对于任何一个逻辑函数式，将其中的：

所有逻辑符号“ + ”、“ · ”交换；

所有逻辑常量“ 1 ”、“ 0 ”交换；

所有逻辑变量取反；

不改变原来的运算顺序。

得到的逻辑函数是原来逻辑函数的反函数。

例：

$$Y = A\bar{B} + \bar{C}D + 0$$

$$\bar{Y} = (\bar{A} + B)(C + \bar{D}) \cdot 1$$

是反演律的推广

例：利用反演定理可方便地写出反函数. 参考书p9.

对偶定理

对偶关系：逻辑符号“ + ”和“ · ”

逻辑常量“ 1 ”和“ 0 ”

对偶式： 所有逻辑符号“ + ”“ · ”交换

所有逻辑常量“ 1 ”“ 0 ”交换

若两个函数相等，则由他们的对偶式形成的两个函数也相等。

例：若 $$(A+D)\bar{C}=A\bar{C}+\bar{C}D+0$$

则 $$AD+\bar{C}=(A+\bar{C})(\bar{C}+D)\cdot 1$$

利用对偶定理，可以帮助我们记忆逻辑公式。另外，在证明某些复杂的逻辑等式时，有时通过证明它们的对偶式来完成可能更方便。

注意点

反演定理：描述原函数和反函数的关系（两个函数之间的关系）

对偶定理：描述原函数构成的逻辑等式和对偶函数构成的逻辑等式的关系（两个命题之间的关系）

在一般情况下，一个逻辑函数的反函数和对偶函数是不同的

常用逻辑恒等式

一、吸收律

$$A + AB = A, \qquad A(A+B) = A$$

$$A + \overline{A}B = A + B, \qquad A(\overline{A}+B) = AB$$

$$A \cdot \overline{AB} = A\overline{B}, \qquad A + \overline{A+B} = A + \overline{B}$$

$$AB + \overline{A}B = B, \qquad (A+B)(\overline{A}+B) = B$$

上述恒等式的简要证明，参考书p8.

二、冗余律

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

$$AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C+D)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

上述恒等式的简要证明，参考书p8.

1.3 逻辑函数的化简与形式转换

目标函数形式（原因：实际电路的需要）

- 与 - 或形式
- 或 - 与形式
- 与非 - 与非形式
- 或非 - 或非形式
- 与或非形式
- 混合形式

目标函数的要求

- 逻辑电路的数量最少（面积约束）
- 逻辑电路的级数最少（速度约束）
- 输入端的数量最少（混合约束）
- 电路稳定可靠 （避免竞争－冒险）

具体问题具体分析，没有一成不变的规定

代数法化简逻辑函数

公式法化简可以适用于任何场合，但是通常没有一定的规律可循，需要敏锐的观察力和一定的技巧。

最常用的化简手段是吸收律、冗余律和反演律。

代数法化简的例子

例一、化简函数 $Y = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}B$

解：利用$AB + A\overline{B} = A$，将原式化简：

$$Y = (ABC + AB\overline{C}) + \overline{A}B$$

$$= AB + \overline{A}B$$

$$= B$$

例二、化简函数 $Y=\overline{AB}+\overline{A}CD+\overline{B}CD$

解：利用反演律和 $AB+A=A$，将原式化简

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{AB}+(\overline{A}CD+\overline{B}CD) \\
&= \overline{AB}+(\overline{A}+\overline{B})CD \\
&= \overline{AB}+\overline{AB}CD \\
&= \overline{AB} \\
&= \overline{A}+\overline{B}
\end{aligned}
$$

其它证明：例如把(ab)反使用反演定理。

例三、化简函数 $Y = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$

解：利用 $A + \overline{A} = 1$，在原式中添加一些项，然后化简

$$Y = A\overline{B} + B\overline{C} + (A + \overline{A})\overline{B}C + \overline{A}B(C + \overline{C})$$

$$= A\overline{B} + B\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

$$= (A\overline{B} + A\overline{B}C) + (B\overline{C} + AB\overline{C}) + (\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC)$$

$$= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C$$

例四、化简函数 $Y = AB\overline{C} + \overline{ABC} \cdot \overline{AB}$

解：利用 $A \cdot \overline{A} = 0$，在原式中添加一些项，然后化简

$$Y = (AB \cdot \overline{AB} + AB\overline{C}) + \overline{ABC} \cdot \overline{AB}$$

$$= AB(\overline{AB} + \overline{C}) + \overline{ABC} \cdot \overline{AB}$$

$$= AB \cdot \overline{ABC} + \overline{ABC} \cdot \overline{AB} = \overline{ABC}$$

例1-7到例1-17，参考书p18-p19

其它证明：例如把(abc)反使用反演定理。

逻辑函数形式转换的例子

以逻辑函数 $Y = AB + CD$ 为例：

例一、将“与－或”函数化为“或－与”式

利用对偶定理实现之：

$$Y^* = (A+B)\cdot(C+D)$$

$$= AC + BC + AD + BD$$

$$Y = (Y^*)^*$$

$$= (A+C)(B+C)(A+D)(B+D)$$

例1-17

“与或”变“或与”：先取对偶式变或与，再利用分配律变与或，再对偶成或与

例二、将“与一或”函数$Y = AB + CD$

转化为“与非一与非”式

利用两次求反，将原式转换：

$$Y = \overline{\overline{AB + CD}}$$

$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$$

“与-或”变“与-非”，利用两次求反

例三、将“与－或”函数$Y = AB + CD$

化为“或非－或非”式

解：先利用对偶定理变成“或与”式，再两次求反

$$Y = (Y^*)^*$$

$$= (A+C)(B+C)(A+D)(B+D)$$

$$= \overline{\overline{(A+C)(B+C)(A+D)(B+D)}}$$

$$= \overline{\overline{\overline{(A+C)} + \overline{(B+C)} + \overline{(A+D)} + \overline{(B+D)}}}$$

“或-与”变“或-非”，利用两次求反

例四、将“与－或”函数$Y = AB + CD$

化为“与或非”式

解：利用两次求反，将原式转换

$$Y = \overline{\overline{AB + CD}}$$

$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$$

$$= \overline{(\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{C} + \overline{D})}$$

$$= \overline{\overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{D}}$$

“与-或”变“与-或-非”，两次求反，底部展开

变换总结：

“与或”变“与非”

“或与”变“或非”

“与或” 变“或与”

“或与”变“与或”

“与或”变“或非”

“或与”变“与非”

“与或”变“与或非”

练习：

写出同或函数的与或、或与、与非、或非、与或非式表达

逻辑函数的卡诺图表示和卡诺图化简法

特点

- 图形化简法
- 标准的表达方式
- 规律的化简过程
- 变量数目有限制（最多5～6个）

最小项

在n个逻辑变量的逻辑函数中，若m为包含n个因子的乘积项（逻辑与），且其中每个逻辑变量都以原变量或反变量的形式出现一次并仅仅出现一次，则称m为这n个变量的最小项。

例：$f(abc) = \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + abc$

$\bar{a}b\bar{c}$ 记为m_2

$a\bar{b}c$ 记为m_5

abc 记为m_7

最大项

在n个逻辑变量的逻辑函数中，若M为包含n个因子的和项（逻辑或），且其中每个逻辑变量都以原变量或反变量的形式出现一次并仅仅出现一次，则称M为这n个变量的最大项。

例： $f(abc) = (a + \overline{b} + c)(\overline{a} + b + \overline{c})(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$

$a + \overline{b} + c$ 记为M_2

$\overline{a} + b + \overline{c}$ 记为M_5

$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ 记为M_7

最小项与最大项的比较

以3变量函数为例

最小项：$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$　　最大项：$M_0 = A + B + C$

最小项：$m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,C$　　最大项：$M_1 = A + B + \overline{C}$

最小项：$m_2 = \overline{A}\,B\,\overline{C}$　　最大项：$M_2 = A + \overline{B} + C$

最小项：$m_3 = \overline{A}\,B\,C$　　最大项：$M_3 = A + \overline{B} + \overline{C}$

最小项：$m_4 = A\,\overline{B}\,\overline{C}$　　最大项：$M_4 = \overline{A} + B + C$

最小项：$m_5 = A\,\overline{B}\,C$　　最大项：$M_5 = \overline{A} + B + \overline{C}$

最小项：$m_6 = A\,B\,\overline{C}$　　最大项：$M_6 = \overline{A} + \overline{B} + C$

最小项：$m_7 = A\,B\,C$　　最大项：$M_7 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

最小项和最大项的性质

对于一个具有 n 个变量的逻辑问题，在输入变量的任意一种取值情况下，总有：

一、必有且仅有一个最小项的逻辑值为1；必有且仅有一个最大项的逻辑值为0。

二、任意2个不同的最小项之积为0；任意两个不同的最大项之和为1。

$$m_i m_j = 0, \quad M_i + M_j = 1$$

三、全体最小项之和为1；全体最大项之积为0。

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1, \quad \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

四、下标相同的最大项和最小项互补。

$$\overline{m_i} = M_i$$

反演定理 p13

逻辑函数的两种标准表达式

最小项之和形式，简称为积之和（SOP）形式

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i m_i \;, \qquad \alpha_i = 0 \; or \; 1$$

最大项之积形式，简称为和之积（POS）形式

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i + M_i) \;, \qquad \alpha_i = 0 \; or \; 1$$

标准表达式的关系

性质1、一个逻辑函数的两种标准逻辑表达式之间，存在以下关系：

若 $F=\sum m_i$ 则 $F=\prod M_j$ 其中$j \neq i$

性质2、一个逻辑函数与其反函数的逻辑表达式之间，存在以下关系：

若 $F=\sum m_i$ 则 $\bar{F}=\prod M_i$

反演定理证明两个性质 p14

练习：给出最小项表示，写出最大项表示、写出反函数表示等。 P14, 例1-4

将逻辑函数化成标准形式

要求按积之和形式展开函数，可以将非最小项的积项乘以形如 $A+\bar{A}$ 的项，其中A是那个非最小项的积项中缺少的输入变量，然后展开，最后合并相同的最小项。

要求按和之积形式展开函数，可以将非最大项的和项加上形如 $A\cdot\bar{A}$ 的项，其中A是那个非最大项的和项中缺少的输入变量，然后展开，最后合并相同的最大项。

例1-5和例1-6，参考书p15

练习：

- 化成最小项之和形式:

$$Y = AB + \overline{\overline{BC} \cdot (\overline{C} + \overline{D})}$$

- 化成最大项之积形式：

$$Y = \bar{A}B\bar{C} + \bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$$

卡诺图

A \ B	0	1
0	*0*	*1*
1	*2*	*3*

A \ BC	00	01	11	10
0	*0*	*1*	*3*	*2*
1	*4*	*5*	*7*	*6*

AB \ CD	00	01	11	10
00	*0*	*1*	*3*	*2*
01	*4*	*5*	*7*	*6*
11	*12*	*13*	*15*	*14*
10	*8*	*9*	*11*	*10*

- 每个方格代表一个最小项或者最大项。方格中编号对应着最小项或最大项的编号。
- 变量排列按照相邻规则进行，即在卡诺图中相邻的方格在逻辑上也相邻。（相邻的意义：两个最小项或最大项之间只有一个变量发生变化）
- 卡诺图的上下左右边缘也是相邻的。

特点：相邻性

卡诺图的填法

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum m(0,4,5,8,9,11,13,14,15)$$

$$=\prod M(1,2,3,6,7,10,12)$$

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	0
11	0	1	1	1
10	1	1	1	0

最小项填 1

最大项填 0

对于一个6变量逻辑函数，如何做卡诺图？

- 变量数大于4的情况，做出并列的若干个4变量卡诺图。例如6变量时，做出4个4变量卡诺图，分别对应00、01、11、10.
- 一般卡诺图不宜超过6个变量。

练习：

- 给出最小项表达式，填卡诺图

$$f(a,b,c,d)=\sum m(1,3,5,7,9)$$

- 给出最大项表达式，填卡诺图

$$f(a,b,c,d)=\prod M(1,3,5,7,9)$$

- 给出非标准形式逻辑表达式，填卡诺图。

$$Y=A\bar{B}C+BC+\bar{A}B\bar{C}D$$

$$Y=(A+\bar{B}+C)(B+C)(\bar{A}+B+\bar{C}+D)$$

卡诺图化简法

根据相邻的方格在逻辑上也相邻的原理，只要相邻的方格满足以下条件：

一、逻辑值相同；

二、小方格数为 2^n 个。

就可以将相邻的方格合并为一个卡诺圈。

卡诺圈越大，可以消去的变量越多，最后得到的逻辑函数越简单。

若卡诺圈包含的小方格数为 2^n 个，而这个逻辑函数具有 m 个变量，则这个卡诺圈对应的项中包含的变量数目为 $m–n$ 个。

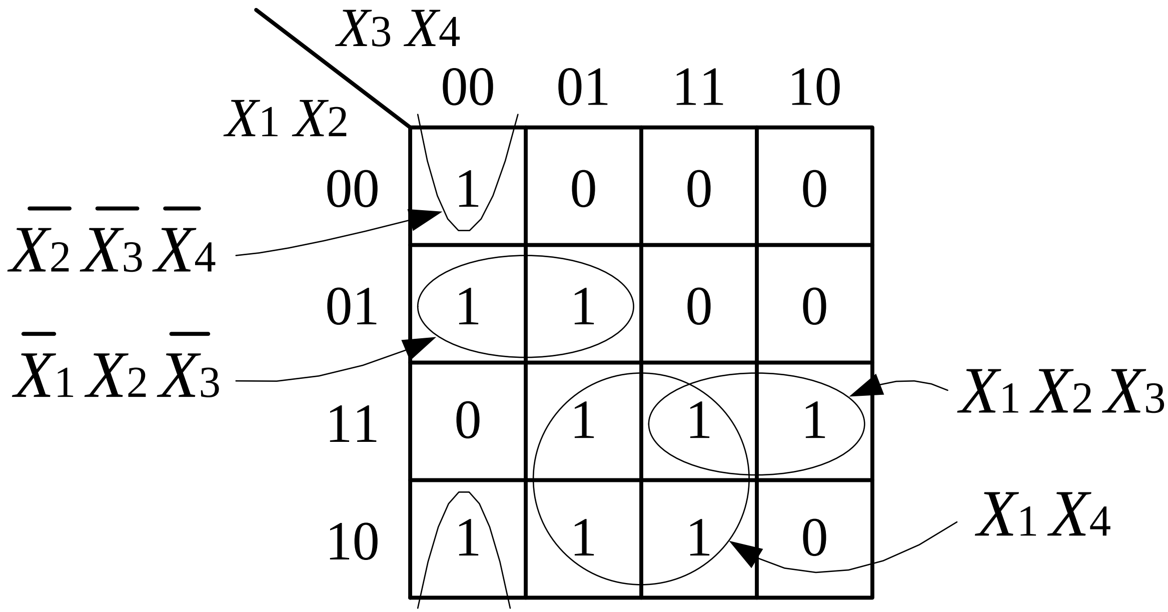
卡诺图的圈法（SOP）

圈“1”

包含2^n个方格

尽可能大

不遗漏



$$f=\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3+x_1x_4$$

卡诺图的四个角是相邻的，上下也是相邻的, 可以合并成一个卡诺圈。

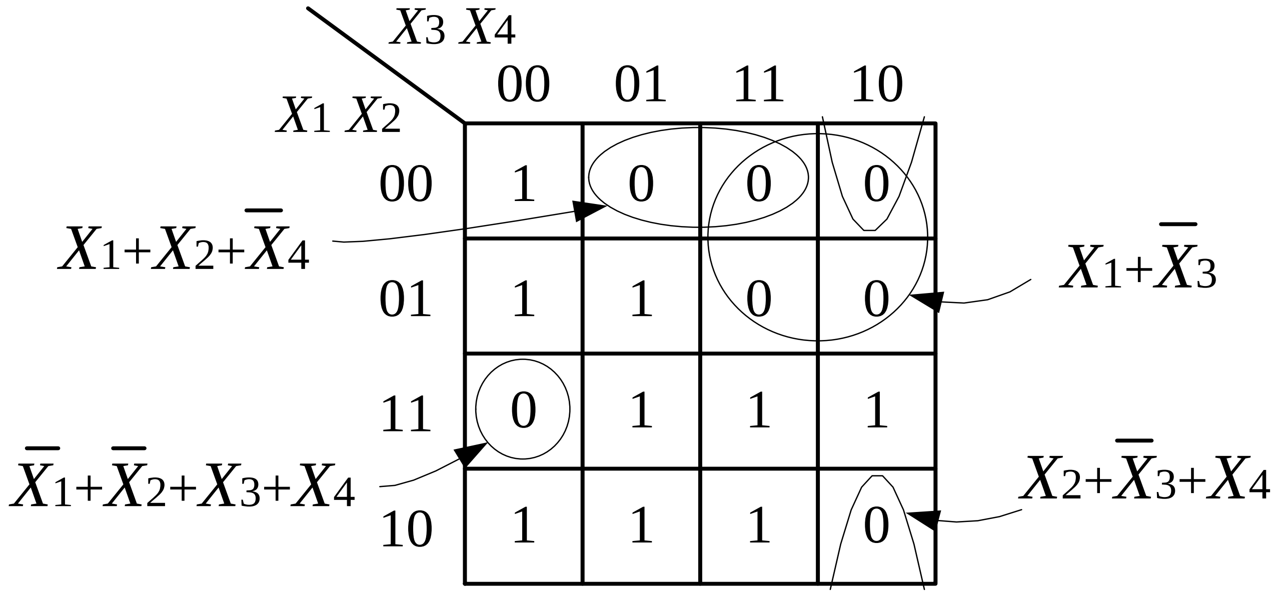
卡诺图的圈法（POS）

圈 “0”

包含2^n个方格

尽可能大

不遗漏



$$f=(x_1+x_2+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3+x_4)(x_2+\bar{x}_3+x_4)(x_1+\bar{x}_3)$$

圈最大项时，凡是卡诺图表头取0的自变量要写成原变量形式，取1的要写成反变量形式

卡诺图化简法的要点

将逻辑函数化为标准形式（或真值表）

填卡诺图

圈卡诺圈（满足2^n个方格要求、尽可能大、不遗漏）

根据卡诺圈写出化简后的逻辑函数

若有必要，运用反演律对所得结果进行变换。例1-21

卡诺图化简的例（一）

$$F_1 = f(a,b,c,d) = \sum m(3,4,6,11,12,14)$$

$$F_2 = f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,5,8,10,13)$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	1	0

$$F_1 = b\bar{d} + \bar{b}cd$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	1

$$F_2 = \bar{b}\bar{d} + \bar{a}\bar{c}d + b\bar{c}d$$

卡诺图化简的例（二）

$$F_3 = f(a,b,c,d)$$
$$= \prod M(0,1,2,5,8,10,13)$$

$$F_4 = f(a,b,c,d)$$
$$= \prod M(3,5,7,9,11)$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	1	0

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

$$F_3 = (b + d)(a + c + \bar{d})(\bar{b} + c + \bar{d})$$

$$F_4 = (a + \bar{b} + \bar{d})(a + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + b + \bar{d})$$

卡诺图化简法的一些术语

蕴涵：逻辑函数的“与或”表达式中的各项

质蕴涵：不能再与其他蕴涵合并的蕴涵

必要质蕴涵：包含一个或多个唯一的最小项的质蕴涵

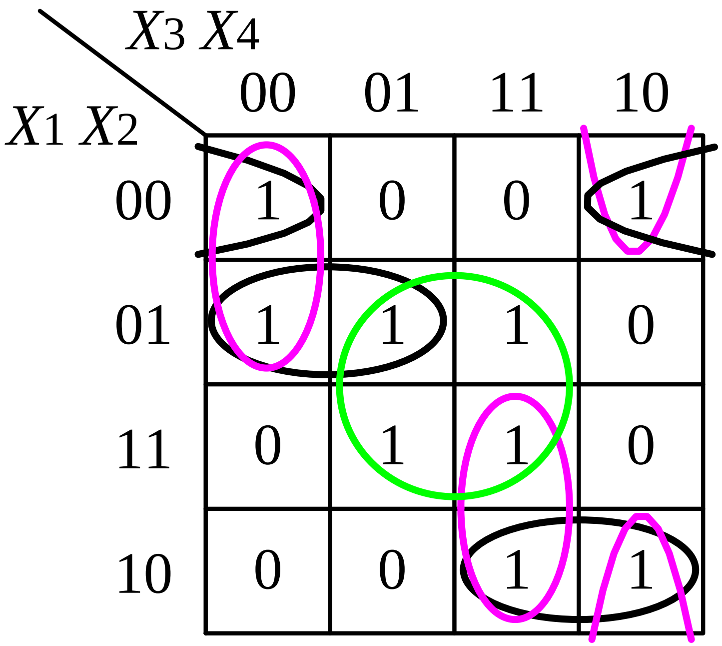
覆盖：包含了逻辑函数中所有最小项的一些蕴涵之“或”

非冗余覆盖：其中每一个蕴涵都是必不可少的覆盖

最小覆盖：包含蕴涵个数最少的非冗余覆盖

最小覆盖的不惟一性

一个逻辑函数，其最小覆盖总是由必要质蕴涵和部分质蕴涵组成，所以它的最小覆盖可能不是惟一的，即它的最简逻辑表达式可能不是惟一的。



绿色：必要质蕴涵

红色和黑色：质蕴涵

最小覆盖：

绿色 + 红色

或：绿色 + 黑色

利用卡诺图运算来进行逻辑化简

逻辑函数 → 卡诺图

逻辑函数的运算 → 卡诺图的运算

卡诺图的运算 → 对应的方格进行运算

证明（以“与”运算为例）：

设 $f_1 = \sum \alpha_{1i} m_i, \quad f_2 = \sum \alpha_{2i} m_i$, 则有

$$f_1 \cdot f_2 = \sum \alpha_{1i} m_i \cdot \sum \alpha_{2i} m_i$$

$$= \sum_i (\alpha_{1i} \cdot \alpha_{2i}) m_i + \sum_{i \neq j} (\alpha_{1i} \cdot \alpha_{2i}) m_i m_j \quad = \sum_i (\alpha_{1i} \cdot \alpha_{2i}) m_i$$

证明的最后一步运用了最小项的性质 2

思考题:试证明“或”、“非”、“异或”运算亦符合上述规则

利用卡诺图运算来进行逻辑化简的例

$$Y(A,B,C,D)=\sum m(4,5,6,7,12,13,14)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1		1
10				

=

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

•

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1		1
10	1	1		1

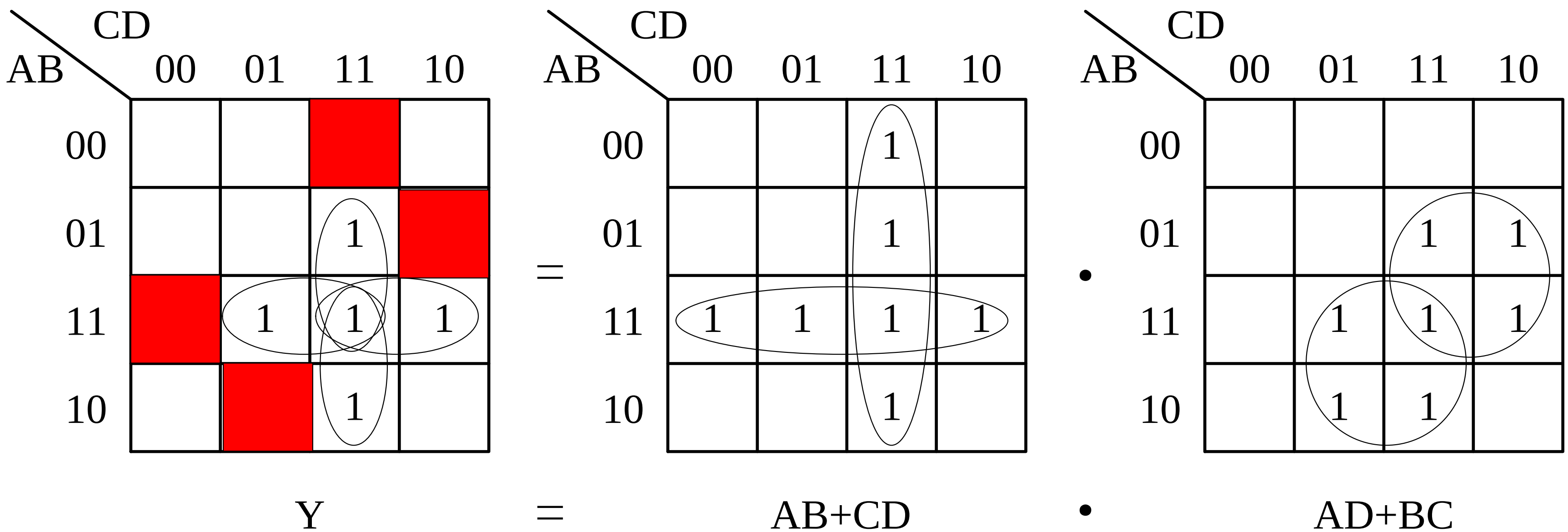
Y = B • $\overline{\text{CDA}}$

希望阻塞的项

常规化简 $Y=B\bar{C}+B\bar{D}+\bar{A}B$

运算化简 $Y=B\cdot\overline{CDA}$

$$Y(A,B,C,D)=\sum m(7,11,13,14,15)$$



常规化简

结果为 3(质蕴含x4)、4 输入端（或x1），共16输入端

运算化简

结果为 2 (质蕴含x4, 或x2， 与x1)输入端，共14输入端

卡诺图运算的一些有关规律

- 0重心：0号方格（即全部变量为0的方格）

  1重心：2^n号方格（即全部变量为1的方格）
- 包含0重心但不包含1重心的质蕴涵，其表达式全部用反变量标注
- 包含1重心但不包含0重心的质蕴涵，其表达式全部用原变量标注
- 既不包含0重心也不包含1重心的质蕴涵，其表达式中一定既有原变量又有反变量
- 目标函数是与非形式并要求全部用原变量表达时，围绕1重心进行。其中卡诺圈圈1，阻塞圈圈0

  例1-23，参考书p24
- 目标函数是或非形式并要求全部用原变量表达时，围绕0重心进行，其中卡诺圈圈0，阻塞圈圈1

  例1-24，参考书p25

不完全确定的逻辑函数的化简

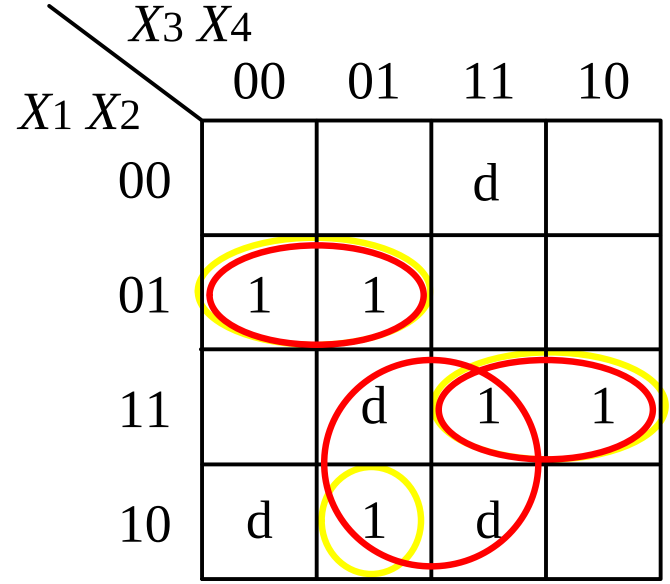
不完全确定的逻辑函数：

由 n 个逻辑变量构成的逻辑函数中，有效的逻辑状态数小于2^n个。那些无效的状态或者是不可能出现，或者无意义。

这些无效的状态被称为任意项，或称为无关项、约束项、禁止项，等等

任意项的处理

- 任意项的值既可为1也可为0
- 带有任意项的逻辑函数在化简时既可以将任意项圈入卡诺圈，也可以不圈入卡诺圈
- 适当地将一些任意项圈入卡诺圈，可以使化简的结果得到极大的简化



黄色：不考虑任意项

红色：考虑任意项

$$F = f(a,b,c,d) = \sum m(2,3,4,5,13,15) + \sum d(8,9,10,11)$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	d	d	d	d

$$F = f(u,v,w,x) = \sum m(1,5,7,9,13,15) + \sum d(8,10,11,14)$$

uv \ wx	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	d
10	d	1	d	d

注意点

任意项的表现形式除了直接用最小项形式表示外，还经常用逻辑表达式表示，称为约束方程

对于用约束方程给出的逻辑问题，一般要将约束条件改写成用最小项表示的任意项形式，才能用卡诺图进行化简

例如：$A=1$、$B=1$这种输入状态不可能出现，可记为$AB=0$。在卡诺图中就是对应$AB=11$的最小项为任意项

使用异或函数的卡诺图化简

异或运算的性质:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$$

$$A \oplus 0 = A, \quad A \oplus 1 = \bar{A}$$

$$A \oplus A = 0, \quad A \oplus \bar{A} = 1$$

$$\overline{A \oplus B} = A \oplus \bar{B} = \bar{A} \oplus B$$

异或（同或）函数的卡诺图

- “棋盘格”特征 (p28, 2/3/4变量异或)
- 异或函数的棋盘格特征：0号方格等于0
- 同或函数的棋盘格特征：0号方格等于1

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

异或函数

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1		1	
01		1		1
11	1		1	
10		1		1

同或函数

利用异或函数化简的例子

$X_1X_2 \backslash X_3X_4$	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		
10	1			

先补成异或形式（蓝色格子）

再利用运算法

$$f = \sum m(1,2,4,7,8,13)$$

$$= (X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4) \cdot (\overline{X_1 X_3})$$

其它例题：例1-26，例1-27。参考书p28

练习

$$P = (\overline{a \oplus c})(\overline{b \oplus d})$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

$$W = b \oplus c \oplus d$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	1	0	1	0
11	1	0	1	0
10	0	1	0	1

多输出逻辑函数的化简

考虑公共蕴涵的使用

公共蕴涵也是越大越好

有时在寻找公共蕴涵过程中会有多种可能的方案出现，这时要根据实际情况作一定的取舍，部分地要依赖于人为的经验

例题1-28、1-29、1-30，参考书p30-p32。

寻找公共蕴涵的过程

单独化简。

观察在多个输出函数中的公共最小项。如果多输出函数比较复杂，这个过程也可以借助表格进行 。

将相邻的公共最小项合并成公共蕴涵（画公共卡诺圈），同时，将在单独化简的卡诺图中包含公共蕴涵的质蕴涵（卡诺圈）划去 。

检查覆盖情况：在卡诺图中观察是否存在未被圈入的最小项。如果没有任何其他最小项未被圈入（完成覆盖），则可以认为化简完成。否则要重新划分卡诺圈，将未被包含的最小项圈入。

影射变量卡诺图

- 在影射变量卡诺图的每个方格中，不但可以包含0，1和任意项，还可以包含变量和函数
- 卡诺图运算
- 例1-31

总结

- 逻辑代数，二值逻辑
- 基本逻辑运算：与或非，基本运算公式
- 逻辑函数：真值表，表达式，卡诺图
- 逻辑函数化简：代数法，卡诺图法。
- 逻辑函数形式转换：反演率，对偶率

VIP

Video Image Processing

Research Group @ Fudan

http://soc.fudan.edu.cn/vip/

Thank you !

Acknowledgement: Part of contents are referenced from Yufeng Xie, Ting Yi PPT